4.4.15 Lineární funkce IV

Předpoklady: 040414

Př. 1: Urči předpis lineární funkce, která prochází přes následující dvojice bodů.
a) $[0;2];[2;3]$ b) $[-3;-2];[6;1]$ c) $[-2;3];[4;-1]$

a) $[0;2];[2;3]$
Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[0;2]$: $2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2$
- $[2;3]$: $3 = a \cdot 2 + b$

Do druhé rovnice dosadíme $b = 2$: $3 = a \cdot 2 + 2 \quad / -2$
$1 = 2a \quad / :$
$a = \frac{1}{2}$
Hledaná funkce $y = \frac{1}{2}x + 2$.

b) $[-3;-2];[6;1]$
Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[-3;-2]$: $-2 = a \cdot (-3) + b$
- $[6;1]$: $1 = a \cdot 6 + b$

Máme soustavu rovnic:
$-3a + b = -2$
$6a + b = 1$ Můžeme řešit odčítací metodou.
$[\![2]\!] - [\![1]\!] \quad 9a = 3$
$a = \frac{1}{3}$
Dopočteme b: $-3a + b = -2 \quad / +3a$
$b = 3a - 2 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -1$
Hledaná funkce $y = \frac{1}{3}x - 1$.

c) $[-2;3];[4;-1]$
Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[-2;3]$: $3 = a \cdot (-2) + b$
- $[4;-1]$: $-1 = a \cdot 4 + b$

Máme soustavu rovnic:
$-2a + b = 3$
$4a + b = -1$

Z první rovnice vyjádříme b a dosadíme do druhé:

$-2a+b=3 \quad / +2a$

$b=2a+3$

Dosadíme: $4a+2a+3=-1 \quad / -3$

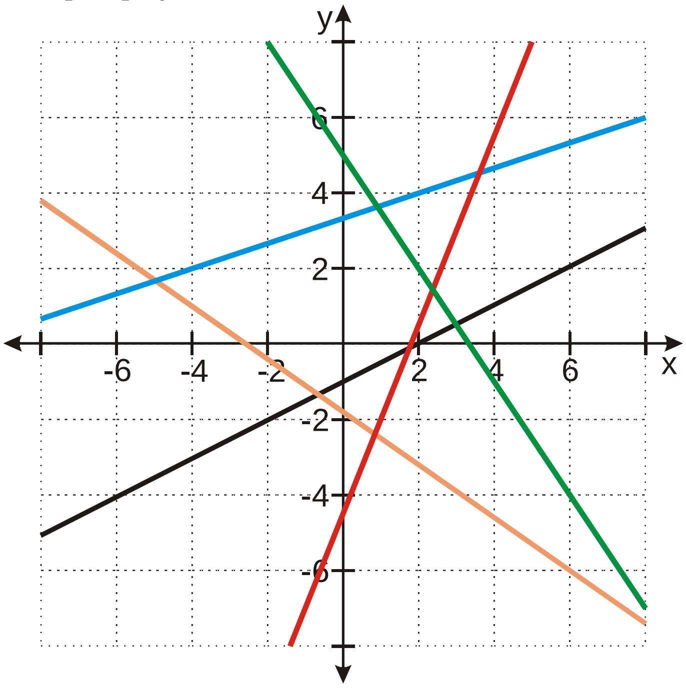
$6a=-4 \quad / :6$

$a=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

Dopočteme b: $b=2a+3=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3=\frac{5}{3}$

Hledaná funkce $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

Př. 2: Urči předpisy lineárních funkcí na obrázku.



U všech funkcí postupujeme stejně: Najde v grafu dva body (nejlépe průsečík s osou y), které použijeme k dosazení do předpisu funkce $y=ax+b$.

Černý graf

- $[0;-1] \Rightarrow b=-1$
- $[2;0] \Rightarrow 0=a\cdot 2+b=2a-1 \quad / +1$

$2a=1 \quad / :2$

$a=\frac{1}{2}$

Černý graf je grafem funkce $y=\frac{1}{2}x-1$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou y v záporných hodnotách, měl by být rostoucí s malým sklonem.

Zelený graf

- $[0;\,5] \;\Rightarrow\; b=5$
- $[2;\,2] \;\Rightarrow\; 2=a\cdot 2+b=2a+5 \quad /-5$

$2a=-3 \qquad /:2$

$a=-\dfrac{3}{2}$

Zelený graf je grafem funkce $y=-\dfrac{3}{2}x+5$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou *y* v kladných hodnotách, měl by být klesající se středním sklonem.

Modrý graf

- $[-1;\,3]:\; 3=a\cdot(-1)+b$
- $[2;\,4]:\; 4=a\cdot 2+b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} -a+b=3 \\ 2a+b=4 \\ \hline \end{array}$$ Můžeme řešit odčítací metodou.

$[\![2]\!]-[\![1]\!] \qquad 3a=1$

$a=\dfrac{1}{3}$

Dopočteme b: $-a+b=3 \quad /+a$

$b=a+3=\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{10}{3}$

Hledaná funkce $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou *y* v kladných hodnotách, měl by být rostoucí s malým sklonem.

Červený graf

- $[1;\,-2]:\; -2=a\cdot 1+b$
- $[3;\,3]:\; 3=a\cdot 3+b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{l} a+b=-2 \\ 3a+b=3 \\ \hline \end{array}$$ Můžeme řešit odčítací metodou.

$[\![2]\!]-[\![1]\!] \qquad 2a=5$

$a=\dfrac{5}{2}$

Dopočteme b: $a+b=-2 \quad /-a$

$b=-2-a=-2-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{9}{2}$

Hledaná funkce $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{9}{2}$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou *y* v záporných hodnotách, měl by být rostoucí s velkým sklonem.

Žlutý graf

- $[-4;1]$: $1 = a \cdot (-4) + b$
- $[6;-6]$: $-6 = a \cdot 6 + b$

Máme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -4a + b &= 1 \\ 6a + b &= -6 \end{aligned}$$

Můžeme řešit odčítací metodou.

$[\![2]\!] - [\![1]\!] \qquad 10a = -7$

$a = \dfrac{-7}{10}$

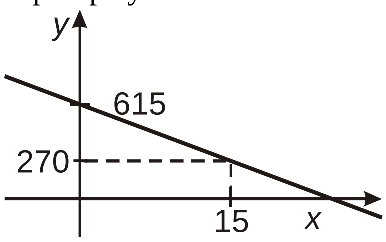
Dopočteme b: $-4a + b = 1 \quad / +4a$

$b = 1 + 4a = 1 + 4 \cdot \left(-\dfrac{7}{10}\right) = \dfrac{10}{10} - \dfrac{28}{10} = \dfrac{-18}{10} = -\dfrac{9}{5}$

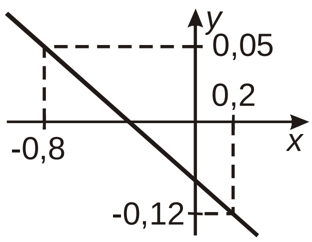
Hledaná funkce $y = -\dfrac{7}{10}x - \dfrac{9}{5}$.

Kontrola: Graf by měl procházet osou *y* v záporných hodnotách, měl by být klesající se středním sklonem.

Př. 3: Urči předpisy lineárních funkcí na obrázcích.

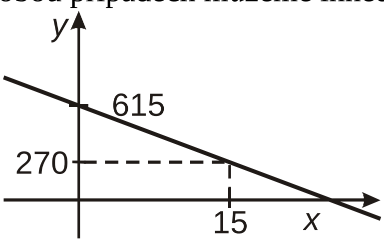


a)



b)

V obou případech můžeme ihned dosazovat body vyznačené na obrázcích.



a)

Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[0; 615]$: $615 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 615$
- $[15; 270]$: $270 = a \cdot 15 + b$

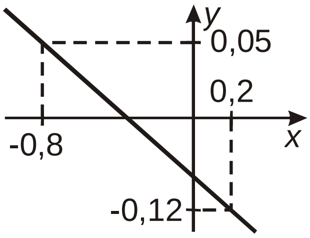
Do druhé rovnice dosadíme $b = 615$: $270 = a \cdot 15 + 615 \qquad / -615$

$-345 = 15a \quad / :$

$a = -23$

Hledaná funkce $y = -23x + 615$.

b)



Dosadíme do předpisu funkce $y = ax + b$:

- $[-0,8; 0,05]$: $0,05 = a \cdot (-0,8) + b$
- $[0,2; -0,12]$: $-0,12 = a \cdot 0,2 + b$

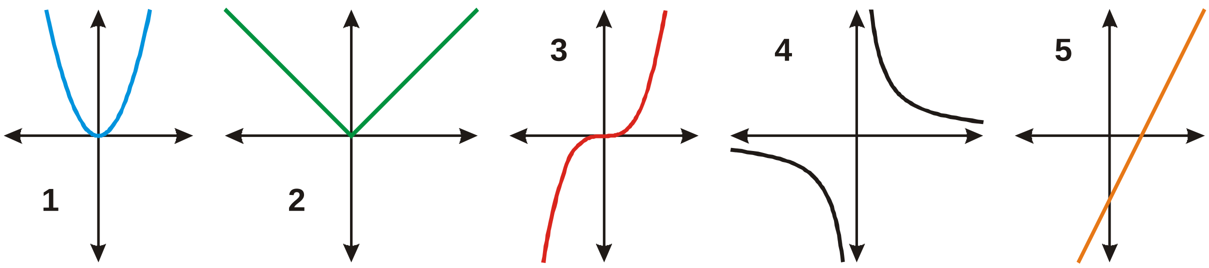
Máme soustavu rovnic:
$-0,8a + b = 0,05$
$0,2a + b = -0,12$
Z první rovnice vyjádříme *b* a dosadíme do druhé:
$-0,8a + b = 0,05 \quad / +0,8a$
$b = 0,8a + 0,05$
Dosadíme: $0,2a + 0,8a + 0,05 = -0,12 \quad / -0,05$
$a = -0,17$
Dopočteme *b*: $b = 0,8a + 0,05 = 0,8 \cdot (-0,17) + 0,05 = -0,136 + 0,05 = -0,086$
Hledaná funkce $y = -0,17x - 0,086$

Pedagogická poznámka: Následující příklad (jen pro rychlejší žáky) není o pamatování (použité funkce ještě nebyly většinou probrány), ale o představivosti. Při diskusi se žáky je také možné zjistit, kdo stále ještě nepochopil smysl funkce jako zařízení, které vložená čísla mění na jiná čísla.

Př. 4: Na následujících obrázcích jsou načrtnuty funkce:

a) $y = x^2$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = 2x - 3$ d) $y = |x|$ e) $y = x^3$

Přiřaď každému obrázku odpovídající předpis.



Obrázek 5 představuje lineární funkci $y = 2x - 3$ v bodě c) (jde o jedinou přímky v nabídce, navíc prochází osou *y* v bodě se zápornou hodnotou *y*).
Ostatní grafy musíme rozlišit, podle předpisů.
a) $y = x^2$ - hodnoty funkce budou pouze nezáporná čísla (druhá mocnina všech čísel je nezáporná), stejnou vlastnost má však i funkce d) $y = |x|$, protože i absolutní hodnota z libovolného čísla je vždy nezáporná.
Hledáme rozdíl mezi funkcemi $y = x^2$ a $y = |x|$:

- $y = x^2$: hodnoty rostou čím dál rychleji $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, …

- $y = |x|$: pro kladná x se chová stejně jako $y = x$,

$\Rightarrow$

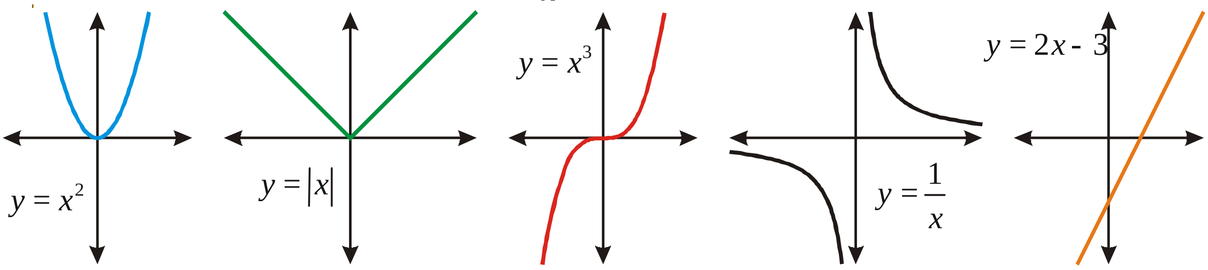
- obrázek 1, představuje funkci $y = x^2$ (hodnoty stoupají čím dál rychleji),
- obrázek 2, představuje funkci $y = |x|$ (hodnoty stoupají jako u funkce $y = x$).

Zbývá rozlišit funkce $y = \frac{1}{x}$ a $y = x^3$:

- $y = \frac{1}{x}$: pro kladná čísla x platí: čím větší x tím menší y: $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{10} = 0,1$, …,
- $y = x^3$: pro kladná čísla x platí: čím větší x tím větší y: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, …,

$\Rightarrow$

- obrázek 3, představuje funkci $y = x^3$ (pro kladná x hodnoty stoupají),
- obrázek 4, představuje funkci $y = \frac{1}{x}$ (pro kladná x hodnoty klesají).



Shrnutí: Předpis lineární funkce získáme ze dvou bodů grafu dosazením a vyřešením vzniklé soustavy rovnic.